これは楽しい数学マジック！

ー第2回ー

数学のウソ　～数学に騙されるな！数字でウソをつく方法～

森井昌克

morii@eedept.kobe-u.ac.jp

（**神戸大学大学院　工学研究科**）

これは楽しい数学マジック！

数学のウソ　～数学に騙されるな！数字でウソをつく方法～

- 本日の主題
  - 先週の積み残し
    - 婚活方法とギャンブル必勝法
  - 数字に騙されるな！
    - 統計の見方
      - コカインの問題？
    - モンティホール問題
      - 感覚と違う
    - 死者との遭遇

婚活問題

- 最良選択問題
  - 浜辺の美女問題
  - n人の美女が海辺に並んでいるとします．それを端から見て行き，一番美人と思う人を選択します．後戻りは許されないものとします．
  - 婚活の戦略
    - 婚活のモデル化？

婚活モデル

- 婚活を通して幾人もの人と知り合い，その中から選択することが一般的です．お付き合いをしながら，結婚まで至るかが問題なのです．ここでお付き合いをしている人と結婚するかという決心は重要な選択です．決して二股は許せません．では，**婚活を始めて何人目の人と結婚するのが選択として一番正しいでしょうか．** つまり，お付き合いをして決心に至らなければ，次の人とお付き合いを始めるということを進めます．どこかで，諦めて(失礼！)この人と結婚すると決めるとき，すなわちこの人が，これまで会った人，そしてこれから会うかもしれない人と比較して最良であろうと予想して結婚を決めるものとします．さらに，さかのぼって，つまり元カレ，元カノとの結婚は許されないとします．一番最初に出会った人と結婚すれば，将来もっと良い人が現れたのではと後悔します．逆に数多くの人と付き合うだけで，結婚に踏み切らなければ，最良だったかも知れない人を見過ごすことになるので，さらに後悔するかも知れません．ではできるだけ後悔しないために，**何番目に付き合った人と結婚を決意すれば良いのでしょうか．**

回答（5人）

- 一人目はかならず別れる！？
- 二人目では、一人目よりも良ければ結婚
- 三人目では、一人目よりも良ければ結婚
- 四人目では、それまでの順位（4人中）が二位いないならば結婚
- 5人目まできたら、迷わず結婚

↓

平均で2位以内の人と結婚出来る（ハズ？）

回答（20人）

- （1）まず、最初の5人はすべて見るだけで選択しない。
- （2）次の5人については、その人が、それまでで最高だったら、選択する。
- （3）次の3人については、それまでで最高か2位だったら選択する。
- （4）次の2人については、それまでで最高か3位までだったら選択する。
- （5）16番目の人が、それまでで4位以内だったら選択する。
- （6）17番目の人が、それまでで5位以内だったら選択する。
- （7）18番目の人が、それまでで7位以内だったら選択する。
- （8）19番目の人が、それまでで10位以内だったら選択する。
- （9）最後の人は、選択せざる得ない.

平均3位以内の人に出会える

ギャンブルはすべて的中？

- ギャンブルは確率
  - サイコロ
    - 3回連続して奇数が出たから、4回目も奇数になる確率は高い、本当か？
    - 2個のサイコロで、その総和が8よりも9のほうが出やすい、本当か？
      - （2、6）（3、5）（4、4）（5、3）（6、2）
      - （3、6）（4、5）（5、4）（6、3）

競馬も確率？

- 競馬の場合、各馬の実力、つまり決められたコースを走りぬく速さは同じではありません。つまりサイコロと違って、各馬が勝ち抜く確率は同じではないということです。競馬で1着を当てるという賭け事では、単純に着順を当てるのではなく、**オッズと呼ばれる主催者側の見込みに沿った重み付けに従って、勝敗の確率を均等にしています。具体的には、配当金に重みを付けて、1着になる確率が高い馬には配当金が少なく、1着になる確率が低い馬には配当金が高くなる**ようにしています。では1着になる確率はどのようにして導出するのでしょうか。それは過去の着順によって確率を推定します。過去の経験が現在、未来に影響を及ぼすのです。

競馬も確率？（2）

- では、オッズが1位（倍率が小さい）にかければ絶対に勝てるか？
  - 期待値
    - 1万円をかければ、平均戻ってくる金額は7,000円
    - 全ての馬にかけた場合のもうけ。
    - 宝くじは1万円使えば、平均当たる金額は3,000円程度

競馬必勝法！？

- 常にオッズが１位の馬にかける！？
  - 期待値は7割では？
  - 人間の欲が確率を変える？
    - 一攫千金を夢見て、オッズが低い馬にかける傾向

自己責任ですから

かならず勝つ方法？

- セントペテルスブルグのパラドックス
  - サイコロを用意し、偶数の目がでれば配当がもらえるゲーム
  - 1回振って、偶数が出れば1円、1回目が奇数で、2回目に偶数が出れば2円、2回目までが奇数で、3回目にして初めて偶数が出れば4円として、n回目で初めて偶数が出れば、2^{n-1}円もらえる
  - このゲーム、参加費いくらであれば得か？
    - 期待値が掛け金以上になるか？

期待値、再び

- サイコロを振って、1の目が出れば、3倍になって賭け金が戻り、それ以外は半分になるとします。100円を賭けたときの期待値を求めましょう。
- 300円になって戻ってくる確率が1／6、50円になって戻ってくる確率が5／6ですから
  - 300×1／6＋50×5／6＝92円
- 賭け金の92%しか戻って来ない

期待値

- 1円の配当がある確率は1／2、2円の配当がある確率は1／4、4円の配当がある確率は1／8、つまり、2^{i}円の配当がある確率は、1／(2^{i+1})となります。この総和は
  - S=Σi=0,..., ∞　[2^{i}×1／(2^{i+1})]
  - =1/2+1/2+ ...
  - =∞
- 期待値は∞(無限大)

数字に騙されるな！

統計の見方

- 数字に騙される人が多い
- 平均神話
- 朝，味噌汁を飲む人は健康？

統計の見方、例えば...

- 「コーラの過剰摂取は低カリウム血症を引き起こす」
  - ソフトドリンクの過剰摂取と健康上の問題はよく取り上げられ，飲み過ぎは健康に悪いことぐらい，実験をしなくても理解できそうです．では，コーラが低カリウム血症だけでなく，体に悪いのかというと疑問が残ります．過剰摂取と言っても，どれぐらい飲めば過剰摂取か人によって基準が異なるからです．私の個人的な基準では，一日1リットル飲めば十分過剰摂取のような気がするのですが，ニュースでは一日2リットルから9リットルと書いています．9リットルも飲む人が多いとは思えません

不思議な数学？

- スモールワールド現象
  - まったく無関係な2人であっても，間に6人を介すればつながる
    - 誰でも高々6人を介することによってオバマ米国大統領と知り合い関係にある
    - 誕生日の問題の応用

日本の紙幣はコカインだらけ？

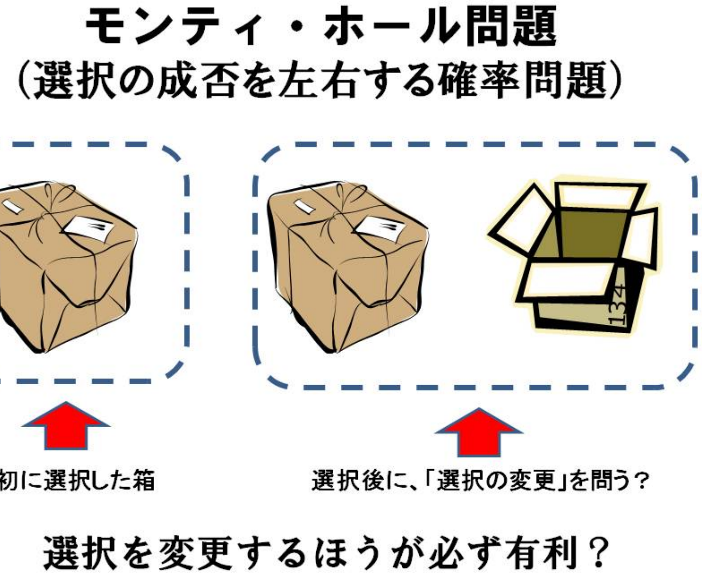
- 米国国内で流通している紙幣の90%近くに微量のコカインが付着
- 日本国内でも12%の紙幣で見つかる
  – 12%の紙幣が薬物取引に使用されたわけではないのです．１枚の紙幣にコカインが付着したとして，その紙幣が他人の手に渡ると，その紙幣を含み複数の紙幣を束ねます．つまり，新たにその前後に重ねられた2枚の紙幣にコカインが付着します．日々，他人の手に渡るとすると，１か月も経たない内に，10億枚以上の紙幣に付着することになります．いわゆる「ねずみ算」と同じなのです。

モンティホール問題

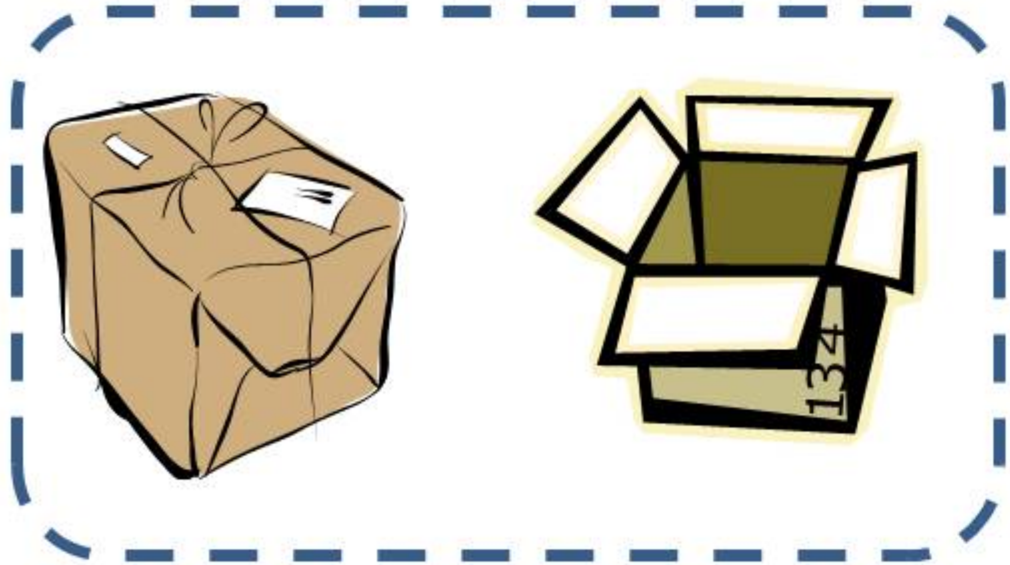
- ３つの箱を用意します。その中の一つには宝物が入っており、他の2つにはゴミが入っているとします。一つを選んで、正解ならば宝物を手に入れられるとします。単純に3つの箱から宝物が入った箱を選ぶ確率は1/3です。
- どれかの箱を選んだあとに、どの箱に宝物が入っているかを知っている私が、あなたの選択しなかった残りの２つの箱で、ゴミが入っている箱のふたを開けます。そして、あなたが選択した箱を変更しても良いとします。このとき、宝物を得るためには変更すべきか否か？

モンティホール問題

- どれかの箱を選んだあとに、どの箱に宝物が入っているかを知っている私が、あなたの選択しなかった残りの２つの箱で、ゴミが入っている箱のふたを開けます。そして、あなたが選択した箱を変更しても良いとします。このとき、宝物を得るためには変更すべきか否か？



モンティ・ホール問題
（選択の成否を左右する確率問題）



最初に選択した箱

選択後に、「選択の変更」を問う？

選択を変更するほうが必ず有利？

回答

- 正解は「変更すべき」
- 変更しない場合の確率は1/3です。変更した場合、宝物を得る確率は2/3になるのです。理由は次の通りです。変更した箱の中に宝物がある確率を求めれば良いのです。最初に選択した箱に宝物が入っている確率は1/3ですから、それ以外、つまり残りの2つの箱に宝物が入っている確率は2/3になるわけです。そして残りの箱のうち、宝物が入っていない箱を開け示しているわけですから、確実にもう一方の箱に宝物が入っています。したがって、2/3の確率で宝物が入っているわけです。

食玩の問題

- 大人買いの法則
  - 食玩とはチョコやガムのおまけとしてフィギュアやプラモデルなどが付いている商品
  - 最近ではコンプガチャ

コンプガチャの問題

- そもそもたかがゲーム（遊び）のはずが…
- 昭和時代を思い出そう！？
  - べったん、ビー玉　等

コンプガチャの問題

- べったん、ビー玉　等
  - 所有権をめぐる子ども同士の争い
    - ただし、大人の関与はなく、争いも限定的
- その後のキンケシ（キン肉マン消しゴム）
  - **ガチャポンで販売**

コンプガチャの問題

- 消費者庁が違法との判断
  - 各社、5月以降逐次廃止
- そもそもコンプガチャとは？
  - 効率よくお金を「巻き上げる」仕組み？
  - じゃ「コンプ」単独、「ガチャ」単独では！？
  - コンプガチャだけでないSNSゲームの問題点
- そもそもSNSとは何？
  - SNSは「出会い系」を複雑にしたものか！？

コンプガチャとは？

- 特定の８枚のカードを集めるとレアカードがもらえる（コンプリート）
  - １枚300円ぐらいで、「ガチャガチャ」と同じようにランダムに出る

食玩の問題

- 大人買いの法則
  - 食玩とはチョコやガムのおまけとしてフィギュアやプラモデルなどが付いている商品
  - 最近ではコンプガチャ

今までとは逆で、思った以上に集め難い！

食玩の問題

- 大人買いの法則
  - 20種類を集めるとすると？
  - 50個も買えば、大概揃えそう？！
    - 実は？
    - 50個　だと　確率10%　（ほとんど揃わない！）
    - 確率50%　なら　70個
    - 確率99%　なら　150個

死者との再会？

- 人の身体がほとんど水で出来ているのはご存知の通りです。人は死を迎えると土に帰ると言われてましたが、現在では火葬されるのが一般的です。その際、人を構成している水の分子は大気に拡散されることになります。
- では、コップ一杯の水の中に、その死者の中になった水の分子が1つでの混じっている確率は何%でしょうか？

死者との再会（1）

- **水の分子がいくつ有るか計算してみましょう。人の身体の60%以上は水だと言われているので、少し大柄の人を考えて水が50 Kgだとしましょう。水の1molあたりの重さが18 g/molであり、その分子数、すなわちアボガドロ数を考慮すると、**原子や分子の数と質量（重さ）との関係を表す数です。6.022 x 10^{23}個の炭素原子の質量を12gとしています。また、ある物質の原子あるいは分子等でアボガドロ数で表される個数の集合を1mol（モル）と呼んでいます。酸素は1mol当たり16g、水素は1mol当たり1gなので、水（H_2O）は1mol当たり18gとなります。

$$\frac{5.0\times10^{4}}{18}\times(6.022\times10^{23})=1.7\times10^{27}$$

死者との再会（2）

- アボガドロ数
  - 原子や分子の数と質量（重さ）との関係を表す数です。6.022 x 10^{23}個の炭素原子の質量を12gとしています。また、ある物質の原子あるいは分子等でアボガドロ数で表される個数の集合を1mol（モル）と呼んでいます。酸素は1mol当たり16g、水素は1mol当たり1gなので、水（H_2O）は1mol当たり18gとなります。

死者との再会（3）

- **地球上の水が約14億 と言われています。これを重さ（グラム）換算すると、1.4×10^{24}g になります。したがって、地球上に存在する水の分子数は**

$$\frac{1.4\times10^{24}}{18}\times(6.022\times10^{23})=4.5\times10^{46}$$

死者との再会(4)

- 先ほどの人の身体にあった水の分子が十分拡散したとすると、地球上の水全体に対する割合として、以下のように、その人の水の分子が含まれている事になります。

$$\frac{1.7\times10^{27}}{4.5\times10^{46}}=3.8\times10^{-20}$$

死者との再会（５）

- コップ一杯の水200gの中で、その人の水の分子がいくつ含まれているか計算すると、25万個もの分子が含まれている事になります。

$$\frac{200}{18}\times 6.022\times 10^{23}\times 3.8\times 10^{-20}=2.5\times 10^{5}$$

死者との再会（6）

- すでに亡くなった人の水の分子が何気なく汲んだコップ一杯の水に25万個も含まれているのです。もちろん、これは地球上のすべての水に十分拡散されたと仮定したときの、さらに期待値ですから、かならず同じ水の分子が25万個含まれているとは限りません。しかし詳細な確率計算の課程を省きますが、コップ一杯の水の中にその水の分子が1つでも存在している確率をもとめると

$$1-10^{-6,000,000}$$

今回のまとめ

婚活とギャンブル必勝法
数字に騙されるな！